Sistemas Dinámicos de Primer Orden

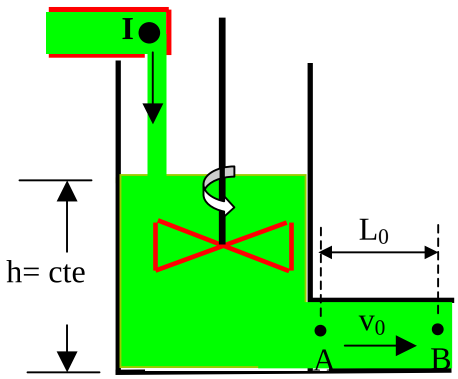


Figura Nº 1

Consideremos el siguiente sistema **adiabático**. Inicialmente la temperatura del liquido en el ingreso al recipiente (punto I) $t_I(0)$ del liquido es la misma que la temperatura del liquido al egreso (punto A) $t_A(0)$ y ambas son nulas.

$t_I(0) = t_A(0) = 0\ ºC$ (Condiciones iniciales nulas)

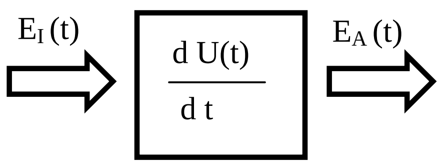
La misión del agitador es la de uniformizar la temperatura en el interior del recipiente.

Supongamos que se produce un cambio en la temperatura del liquido que ingresa. Se considera que la cantidad de liquido que circula se mantiene constante, por lo que la altura del nivel del liquido se mantiene constante.

Al producirse un cambio en la temperatura del liquido de ingreso (y como no hay perdida de energía), se producirá un cambio en la energía interna del sistema.

Esta relación esta dada por:

$$E_I(t) - E_A(t) = \frac{d\,U(t)}{d\,t} \qquad (1)$$



$E_I(t)$: Entalpía que ingresa al Sistema
$E_A(t)$: Entalpía que ingresa al Sistema
$U(t)$: Energía interna del Sistema

$$E_I(t) = m.\ cp.\ [\, t_I(t) - t_I(0)\,] = \gamma\ .\ Q.\ cp.\ [\, t_I(t) - t_I(0)\,] \qquad (2)$$

$$E_A(t) = m.\ cp.\ [\, t_A(t) - t_A(0)\,] = \gamma\ .\ Q.\ cp.\ [\, t_A(t) - t_A(0)\,] \qquad (3)$$

m: Caudal másico del liquido que ingresa
cp: Calor especifico del liquido a presión cte.
Q: Caudal del líquido
γ : Densidad del líquido

Restando (2) a (3)

$$E_I(t) - E_A(t) = \gamma\ .\ Q.\ cp.\ [\, t_I(t) - t_A(t)\,] \qquad (4)$$

$$U(t) = M\ .u(t) = \gamma\ .\ V.\ cv.\ [\, t_A(t) - t_A(0)\,] \qquad (5)$$

M: Masa del liquido en el recipiente
u(t): Energía interna del sistema / unidad de masa
cv: Calor especifico del liquido a volumen cte
V: Volumen del tanque del líquido

Derivando a (5) respecto del tiempo

$$\frac{d\,U(t)}{d\,t} = \gamma\ .\ V.\ cv\ \frac{d\,t_A(t)}{d\,t} \qquad (6)$$

Reemplazando (6) y (4) en (1):

$$\gamma \,.\, Q.\, cp.\, [\, t_I(t) - t_A(t)\,] = \gamma \,.\, V.\, cv.\ \frac{d\, t_A(t)}{d\, t}$$

$$Q.\, cp.\, [\, t_I(t) - t_A(t)\,] = V.\, cv.\ \frac{d\, t_A(t)}{d\, t}$$

Aplicando la Transformada de Laplace y considerando que las condiciones iniciales son nulas, calcularemos la función de transferencia del sistema:

$$Q.\, cp.\, [\, T_I(s) - T_A(s)\,] = V.\, cv.\, s.\, T_A(s)$$

$$\frac{T_A(s)}{T_I(s)} = \frac{Q.\, cp}{Q.\, cp + V.\, cv.\, s} = \frac{1}{1 + \dfrac{V.\, cv.}{Q.\, cp}\, s}$$

$$\frac{T_A(s)}{T_I(s)} = \frac{1}{1 + \tau .\, s} \qquad (7)$$

Siendo $\tau = \dfrac{V.\, cv}{Q.\, cp}$ y se llama "constante de tiempo del sistema "

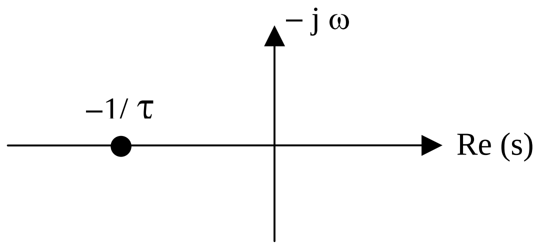
Si el denominador de (7) lo igualamos a cero, obtenemos lo que se denomina " Ecuación característica del Sistema":

$$1 + \tau .\, s = 0 \qquad (8)$$

Y el valor de ***s*** que verifica la (8) se denomina " Raiz de la Ecuación característica del Sistema " o "Valor Propio". Para nuestro caso el valor propio de (8) será:

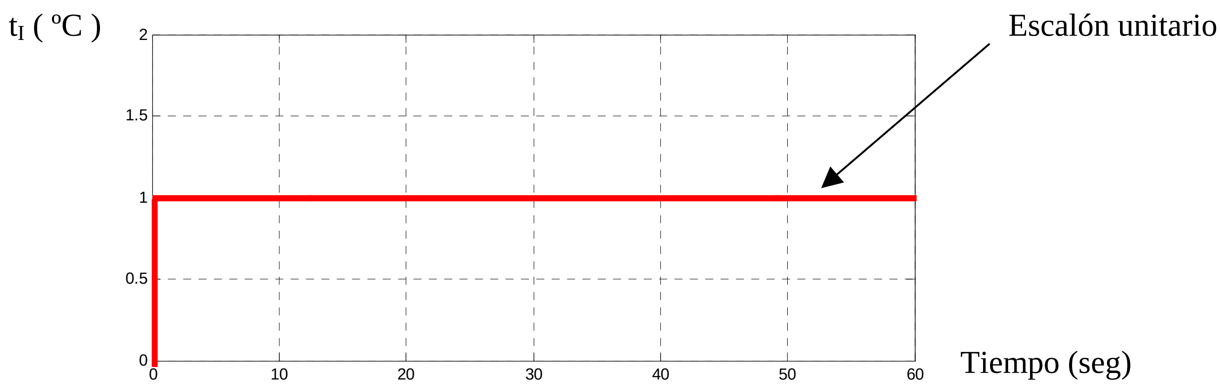
$$s = -1 / \tau \qquad (9)$$

La ubicación de este valor propio en el plano s, será:



Plano s

Si se considera que el cambio en el valor de la temperatura del liquido que ingresa (entrada o excitación del sistema), es un escalón unitario:



La temperatura en el punto A (salida o respuesta del sistema) (en el dominio de s) será:

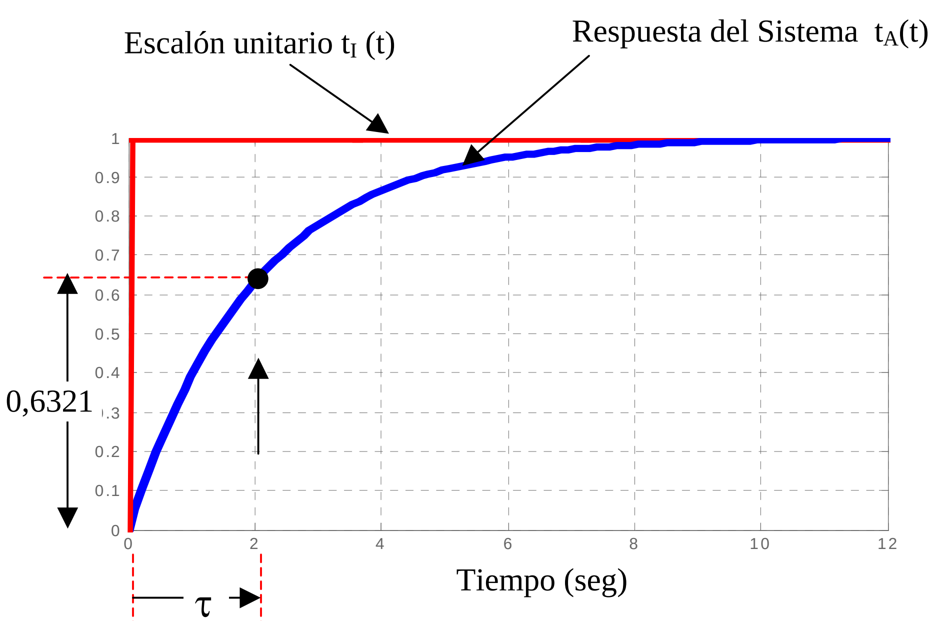
$$T_A(s) = \frac{1}{1+\tau . s} \quad \frac{1}{s}$$

Aplicando el método de las fracciones parciales y la Tabla de transformadas de Laplace, se obtiene en el dominio del tiempo:

$$t_A(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (10)$$

Vemos que la Ec. (10) es de la forma : $t_A(t) = \left(1 - e^{a.t}\right)$, comparando (10) y (9), vemos que el valor propio me indica el comportamiento de la salida del sistema en el punto A

En la siguiente Figura vemos la entrada y salida del sistema para un τ = 2 segundos



Para t= τ $\longrightarrow$ $t_A(t) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

Cuanto mayor sea τ , mas rápida es la respuesta del sistema (mas rápido alcanza el valor estacionario).

El tiempo τ , se puede definir como el tiempo que tarda la salida del sistema en alcanzar el 0,6321 % de su valor final

Si en vez de considerar la salida del sistema al punto A la consideramos en el punto B, se cumple que:

$$t_B\,(t) = t_A(t - T_0) \quad \text{con} \quad T_0 = L_0 / v_0 \quad \text{(ver Figura Nº 1)}$$

Siendo v_0 la velocidad del liquido en la salida del recipiente y la que supondremos que es constante.
Al parámetro T_0 se lo conoce como retraso de transporte o tiempo muerto (delay time)

Se puede demostrar que la función de transferencia del sistema será ahora :

$$\frac{T_B(s)}{T_I(s)} = \frac{e^{-T_0\,s}}{1 + \tau .\ s} = \frac{T_A(s)}{T_I(s)}\; e^{-T_0\,s}$$

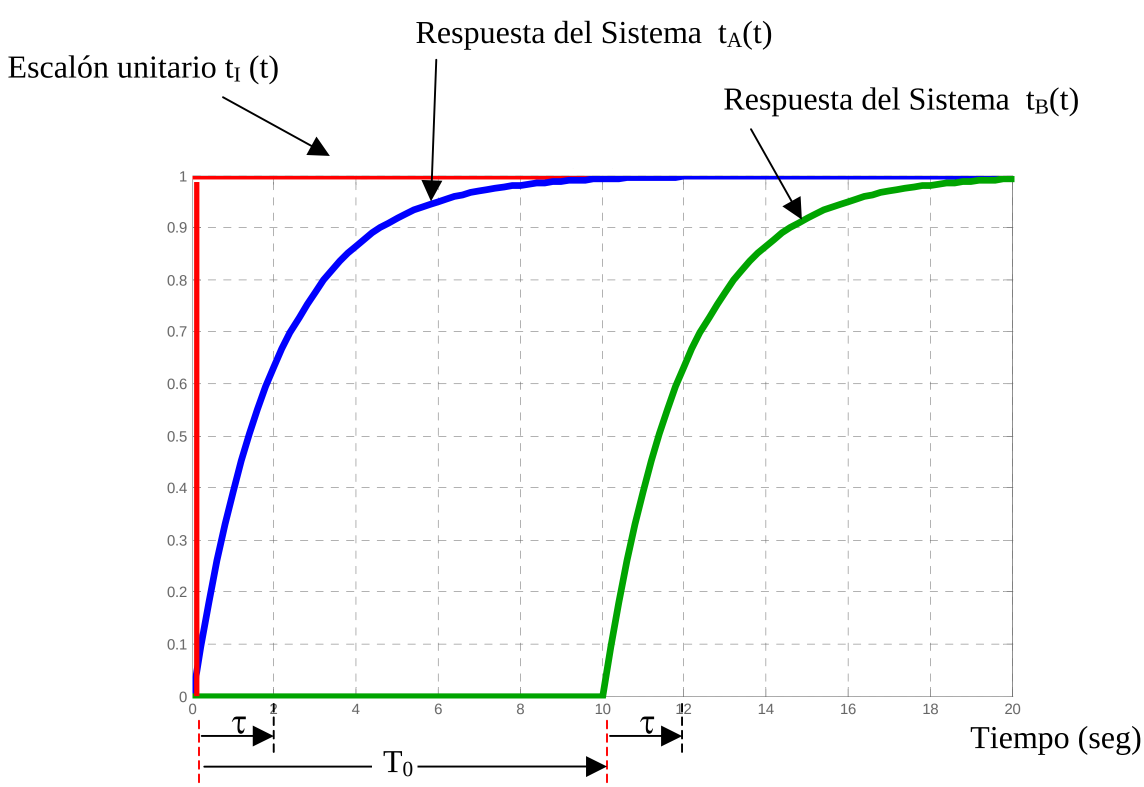
Si consideramos nuevamente que el cambio en el valor de la temperatura del liquido que ingresa es un escalón unitario, la temperatura en el punto B (salida o respuesta del sistema) (en el dominio de s) será:

$$T_B(s) = \frac{e^{-T_0\,s}}{1 + \tau .\ s} \quad \frac{1}{s}$$

Aplicando el método de las fracciones parciales y la Tabla de transformadas de Laplace, se obtiene en el dominio del tiempo:

$$t_B\,(t) = [\,1 - e^{-(t - T_0)/\tau}\,]$$

En la siguiente Figura se aprecia la relación entre la entrada al sistema y la salida para los puntos A y B para un T_0 de 10 segundos



Vemos de la Figura anterior que la salida para el punto B esta desplazada respecto de la salida para el punto A en 10 segundos.

Para un sistema de 1º orden generico, tendriamos que para una entrada escalon unitario, su salida sería:

$$T_X(s) = \frac{K.\, e^{-T_0\, s}}{1 + \tau.\, s} \quad \frac{1}{s}$$

Siendo el parámetro K la “ Ganancia Estática del Sistema”, y es la relación entre la respuesta (en estado estacionario) y la entrada (cuando esta es un escalón unitario) del sistema.